

区间论域上的区间可拓集及其关联函数

胡宝清, 何娟娟

(武汉大学 数学物理系, 湖北 武汉 430072)

摘要: 从实际应用出发, 考虑区间与区间之距为区间数、区间与区间套的位值为区间数、区间的关联度也为区间数时, 区间论域上的区间可拓集理论与关联函数.

关键词: 可拓集; 距; 区间数; 位值; 关联函数

中图分类号: O159

文献标识码: A

文章编号: 1007-7162(2001)01-0048-07

1 问题的提出

自蔡文 1983 年提出可拓集合以来^[1], 从物元分析^[2]到可拓学^[3], 可拓学已初步形成了它的理论框架, 并开始向应用领域发展^[4].

在实数域上起作用的是点和区间, 而点与点的距离定义为

$$\rho_0(x, y) = |x - y|, x, y \in \mathbf{R}$$

为了建立关联函数, 可拓学中引入了点与区间的距离——距的概念, 即

$$\rho(x, X_0) = |x - \frac{a+b}{2}| - \frac{b-a}{2}, x \in \mathbf{R}, X_0 = (a, b),$$

称为 x 与区间 X_0 之距. 在此基础上引入位值概念, 从而建立关联函数.

在可拓方法的应用中, 很多用到了这种建立在距概念基础之上的关联函数. 例如文献[5]中水质评价采用了可拓方法, 待评物元的量值为点, 水质标准的量值为区间. 文献[6]又将此方法应用于围岩稳定性分类之中, 待评围岩样品的指标值为点, 围岩稳定性单指标分类标准为区间. 这些应用充分说明了可拓评价方法的应用价值. 在这些应用中, 评价方法建立在点与区间的距离——距的基础之上. 但在实际应用中, 由于测量、计算所带来的数据误差、信息不完全性带来的数据不完全、人为主观因素带来的数据不准确等对待评物元的量值可能为一区间, 这时要考虑区间与区间的距离.

文献[7]讨论了区间论域上的可拓集, 考虑区间与区间的距离, 即

$$\rho(< x, y >, < a, b >) = \frac{1}{2}(\rho(x, < a, b >) + \rho(y, < a, b >)),$$

称为区间 $< x, y >$ 与区间 $< a, b >$ 之距.

在此基础上相应的可拓评价方法以及在水质评价中的应用将另文给出. 在应用中待评物元的量值与水质标准的量值皆为区间. 由区间与区间之距的定义易知下列性质:

收稿日期: 2000-06-30

基金项目: 高等学校骨干教师资助计划项目

作者简介: 胡宝清(1962), 男, 教授; 主要研究方向: 不确定系统分析, 金融数学.

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.

$$\text{性质 1 } \vartheta(< x_0 - \delta, x_0 + \delta>, < a, b>) = \begin{cases} a - x_0, & x_0 + \delta \leq \frac{a+b}{2}, \\ x_0 - b, & x_0 - \delta \geq \frac{a+b}{2}, \\ \delta - \frac{b-a}{2}, & x_0 - \delta \leq \frac{a+b}{2} \leq x_0 + \delta. \end{cases}$$

该性质说明当 $x_0 \leq x_0 + \delta \leq \frac{a+b}{2}$ 时, $\vartheta(< x_0 - \delta, x_0 + \delta>, < a, b>) = a - x_0$, 当 $\frac{a+b}{2} \leq x_0 - \delta \leq x_0$ 时, $\vartheta(< x_0 - \delta, x_0 + \delta>, < a, b>) = x_0 - b$, 此时区间 $< x_0 - \delta, x_0 + \delta>$ 与区间 $< a, b>$ 之距与 $< x_0 - \delta, x_0 + \delta>$ 的宽度无关. 当 $x_0 - \delta \leq \frac{a+b}{2} \leq x_0 + \delta$ 时, $\vartheta(< x_0 - \delta, x_0 + \delta>, < a, b>) = \delta - \frac{b-a}{2}$, 这时与 $< x_0 - \delta, x_0 + \delta>$ 的中点无关. 例如 $\forall a \in [0, \frac{1+b}{2}]$ ($b \geq 1$), $\vartheta(< -a, a>, < 1, b>) = 1$. 这样可能在某些应用中会产生某种偏差. 为便于应用, 有必要重新讨论区间距. 基于这个目的, 本文将对区间可拓集以及相应关联函数进行全面讨论. 本文首先引入区间可拓集以及距的概念并讨论其性质, 然后重新讨论了区间数的代数运算, 最后在此基础上给出了相应的关联函数.

2 区间可拓集合

2.1 区间可拓集合的定义

在本文中 $\mathbf{R}$ 为实数集, $< a, b>$ 为文献[2]中所表示的区间, 当 $a = b$ 时, 记 $< a, a>$ 为 $< a>$, 此时 $< a, a> = [a] = \{a\}$. 令 $I = \{[\underline{a}, \bar{a}] \mid \underline{a} \leq \bar{a}, \underline{a}, \bar{a} \in \mathbf{R}\}$,

$$I^+ = \{[\underline{a}, \bar{a}] \mid 0 \leq \underline{a} \leq \bar{a}, \underline{a}, \bar{a} \in \mathbf{R}\}, I^- = \{[\underline{a}, \bar{a}] \mid \underline{a} \leq \bar{a} \leq 0, \underline{a}, \bar{a} \in \mathbf{R}\}.$$

当 $\underline{a} = \bar{a}$ 时, 记 $[\underline{a}, \bar{a}] = \{a\} = a$.

定义 1 设 U 为论域, 若对 U 中任一元素 $u, u \in U$, 都有一区间数

$$K(u) = [\underline{K}(u), \bar{K}(u)] \in I, \underline{K}(u), \bar{K}(u) \in \mathbf{R}$$

与之对应, 则称

$$\tilde{A} = \{(u, y) \mid u \in U, y = K(u) = [\underline{K}(u), \bar{K}(u)] \in I\}$$

为论域 U 上的一个区间可拓集合, 简称 UI 可拓集. 其中 $y = K(u)$ 为 $\tilde{A}$ 的区间关联函数, 简称 UI 关联函数. $K(u)$ 为关于 $\tilde{A}$ 的 UI 关联度. 当 $U = \mathbf{R}$ 时, $\tilde{A}$ 称为 RI 可拓集. 当 $U = I$ 时, $\tilde{A}$ 称为 II 可拓集. 为了统一, 将论域 U 上的可拓集称为 UR 可拓集. 建立在 UR 可拓集、 UI 可拓集上的可拓理论(方法)分别称为 UR 可拓理论(方法)、 UI 可拓理论(方法). 称

$$A = \{u \mid u \in U, \underline{K}(u) \geq 0\}$$

为 $\tilde{A}$ 的正域; 称

$$\bar{A} = \{u \mid u \in U, \bar{K}(u) \leq 0\}$$

为 $\tilde{A}$ 的负域; 称

$$J_0 = \{u \mid u \in U, \underline{K}(u) \cdot \bar{K}(u) \leq 0\}$$

为 $\tilde{A}$ 的零界.

2.2 区间可拓集合的可拓域与稳定域

定义 2 对于 UI 可拓集合

$$\tilde{A} = \{(u, y) \mid u \in U, y = K(u) = [\underline{K}(u), \overline{K}(u)] \in I\}$$

给定一变换 $T: U \rightarrow U$, 若在变换 T 下, $\tilde{A}$ 的负域或零界中的某些元素变到正域, 这些元素的全体构成的集合称为 $\tilde{A}$ 关于变换 T 的正可拓域, 记作

$$A_+(T) = \{u \mid u \in U, u \in \bar{A} \cup J_0, Tu \in A\}.$$

若在变换 T 下, $\tilde{A}$ 的正域或零界中的某些元素变到负域, 这些元素的全体构成的集合称为 $\tilde{A}$ 关于变换 T 的负可拓域, 记作

$$A_-(T) = \{u \mid u \in U, u \in A \cup J_0, Tu \in \bar{A}\}.$$

若在变换 T 下, $\tilde{A}$ 的正域中的元素经变换 T 后仍在正域中, 这些元素的全体构成的集合称为 $\tilde{A}$ 关于变换 T 的正稳定域, 记作

$$A_+(T) = \{u \mid u \in U, u \in A, Tu \in A\}.$$

若在变换 T 下, $\tilde{A}$ 的负域中的元素经变换 T 后仍在负域中, 这些元素的全体构成的集合称为 $\tilde{A}$ 关于变换 T 的负稳定域, 记作

$$A_-(T) = \{u \mid u \in U, u \in \bar{A}, Tu \in \bar{A}\}.$$

若在变换 T 下, $\tilde{A}$ 的正域或负域中的某些元素变到零界中, 这些元素的全体构成的集合称为 $\tilde{A}$ 关于变换 T 的不确定性可拓域, 记作

$$A_0(T) = \{u \mid u \in U, u \in A \cup \bar{A}, Tu \in J_0\}.$$

若在变换 T 下, $\tilde{A}$ 的零界中的元素经变换 T 后仍在零界中, 这些元素的全体构成的集合称为 $\tilde{A}$ 关于变换 T 的不确定性稳定域, 记作

$$A_0(T) = \{u \mid u \in U, u \in J_0, Tu \in J_0\}.$$

3 区间距与区间位值

3.1 区间数的四则运算

从实际应用出发, 文献[8], [9], [10] 讨论了区间数的四则运算问题, 给出了区间数的四则运算法则. 为了便于关联函数的引入, 本文修正区间数的四则运算法则.

设 $[\underline{a}, \bar{a}] \in I$, 则 $a_0 = \frac{\underline{a} + \bar{a}}{2}$ 与 $\delta a = \frac{\bar{a} - \underline{a}}{2}$ 分别称为 $[\underline{a}, \bar{a}]$ 的中心与半径, 将 $[\underline{a}, \bar{a}]$ 表示为 $\lceil a_0, \delta a \rceil$, 即 $\lceil a_0, \delta a \rceil = [a_0 - \delta a, a_0 + \delta a]$.

定义 3 设 $\lceil a_0, \delta a \rceil, \lceil b_0, \delta b \rceil \in I$, 则

$$(1) \lceil a_0, \delta a \rceil + \lceil b_0, \delta b \rceil = \lceil a_0 + b_0, \delta a + \delta b \rceil,$$

$$(2) \lceil a_0, \delta a \rceil - \lceil b_0, \delta b \rceil = \lceil a_0 - b_0, |\delta a - \delta b| \rceil,$$

$$(3) \lceil a_0, \delta a \rceil \times \lceil b_0, \delta b \rceil = \lceil a_0 b_0, \max\{|a_0| \delta b, \delta a |b_0|, \delta a \delta b\} \rceil,$$

$$(4) \lceil a_0, \delta a \rceil \div \lceil b_0, \delta b \rceil = \lceil a_0, \delta a \rceil \times (1/\lceil b_0, \delta b \rceil), 0 \notin \lceil b_0, \delta b \rceil,$$

$$\text{其中 } 1/\lceil b_0, \delta b \rceil = \lceil b_0/(b_0^2 - \delta b^2), \delta b/(b_0^2 - \delta b^2) \rceil, 0 \notin \lceil b_0, \delta b \rceil.$$

性质 2 (1) $\lceil a_0, \delta a \rceil + \lceil b_0, \delta b \rceil = \lceil b_0, \delta b \rceil + \lceil a_0, \delta a \rceil$;

$$(2) \lceil a_0, \delta a \rceil \times \lceil b_0, \delta b \rceil = \lceil b_0, \delta b \rceil \times \lceil a_0, \delta a \rceil.$$

性质 3 (1) $\lceil a_0, \delta a \rceil + (\lceil b_0, \delta b \rceil + \lceil c_0, \delta c \rceil) = (\lceil a_0, \delta a \rceil + \lceil b_0, \delta b \rceil) + \lceil c_0, \delta c \rceil$;

$$(2) \lceil a_0, \delta a \rceil \times (\lceil b_0, \delta b \rceil \times \lceil c_0, \delta c \rceil) = (\lceil a_0, \delta a \rceil \times \lceil b_0, \delta b \rceil) \times \lceil c_0, \delta c \rceil.$$

性质4 (1) $k \times \lceil b_0, \delta b \rceil = \lceil kb_0, |k| \delta b \rceil, k \in \mathbf{R};$

$$(2) \lceil a_0, \delta a \rceil \div k = \lceil a_0/k, \delta a/|k| \rceil, k \in \mathbf{R}, k \neq 0;$$

$$(3) \lceil a_0, \delta a \rceil - \lceil a_0, \delta a \rceil = \lceil 0, 0 \rceil = 0.$$

性质5 $\lceil b_0, \delta b \rceil \in I^+ (I^-) \Leftrightarrow 1/\lceil b_0, \delta b \rceil \in I^+ (I^-), 0 \notin \lceil b_0, \delta b \rceil.$

性质6 设 $\lceil a_0, \delta a \rceil, \lceil b_0, \delta b \rceil \in I^+$ 或 $\lceil a_0, \delta a \rceil, \lceil b_0, \delta b \rceil \in I^-$, 则 $\lceil a_0, \delta a \rceil \times \lceil b_0, \delta b \rceil \in I^+$. 反之, 如果 $\lceil a_0, \delta a \rceil \times \lceil b_0, \delta b \rceil \in I^+$ 且 $\lceil a_0, \delta a \rceil \times \lceil b_0, \delta b \rceil \neq 0$, 则 $\lceil a_0, \delta a \rceil, \lceil b_0, \delta b \rceil \in I^+$ 或 $\lceil a_0, \delta a \rceil, \lceil b_0, \delta b \rceil \in I^-$.

证明 设 $\lceil a_0, \delta a \rceil, \lceil b_0, \delta b \rceil \in I^+$, 则

$$a_0 b_0 - a_0 \delta b = a_0 (b_0 - \delta b) \geq 0,$$

$$a_0 b_0 - \delta a b_0 = (a_0 - \delta a) b_0 \geq 0,$$

$$a_0 b_0 - \delta a \delta b \geq 0,$$

于是 $\lceil a_0, \delta a \rceil \times \lceil b_0, \delta b \rceil = \lceil a_0 b_0, \max\{a_0 \delta b, \delta a b_0, \delta a \delta b\} \rceil = [a_0 b_0 - \max\{a_0 \delta b, \delta a b_0, \delta a \delta b\}, a_0 b_0 + \max\{a_0 \delta b, \delta a b_0, \delta a \delta b\}] \in I^+.$

对于 $\lceil a_0, \delta a \rceil, \lceil b_0, \delta b \rceil \in I^-$ 类似可证.

反之, 设 $\lceil a_0, \delta a \rceil \times \lceil b_0, \delta b \rceil \in I^+$ 且 $\lceil a_0, \delta a \rceil \times \lceil b_0, \delta b \rceil \neq 0$.

(1) 当 $\max\{|a_0| \delta b, \delta a |b_0|, \delta a \delta b\} = |a_0| \delta b$ 时, $\lceil a_0, \delta a \rceil \times \lceil b_0, \delta b \rceil = \lceil a_0 b_0, |a_0| \delta b \rceil$, 显然 $a_0 \neq 0$.

若 $a_0 > 0$, 则 $\lceil a_0, \delta a \rceil \times \lceil b_0, \delta b \rceil = [a_0 b_0 - a_0 \delta b, a_0 b_0 + a_0 \delta b]$, 因 $a_0 b_0 - a_0 \delta b \geq 0$, 所以 $b_0 - \delta b \geq 0$, 即 $\lceil b_0, \delta b \rceil \in I^+$. 又 $a_0 \delta b \geq \delta a \delta b$, 有

$$(i) \delta b = 0 \Rightarrow \delta a = 0, \text{从而 } \lceil a_0, \delta a \rceil = a_0 \in I^+;$$

$$(ii) \delta b \neq 0 \Rightarrow a_0 \geq \delta a, \text{从而 } \lceil a_0, \delta a \rceil \in I^+.$$

若 $a_0 < 0$, 则 $\lceil a_0, \delta a \rceil \times \lceil b_0, \delta b \rceil = [a_0 b_0 + a_0 \delta b, a_0 b_0 - a_0 \delta b]$, 因 $a_0 b_0 + a_0 \delta b \geq 0$, 所以 $b_0 + \delta b \leq 0$, 即 $\lceil b_0, \delta b \rceil \in I^-$. 又 $-a_0 \delta b \geq \delta a \delta b$, 有

$$(i) \delta b = 0 \Rightarrow \delta a = 0, \text{从而 } \lceil a_0, \delta a \rceil = a_0 \in I^-;$$

$$(ii) \delta b \neq 0 \Rightarrow -a_0 \geq \delta a, \text{从而 } \lceil a_0, \delta a \rceil = a_0 \in I^-.$$

(2) 当 $\max\{|a_0| \delta b, \delta a |b_0|, \delta a \delta b\} = \delta a |b_0|$ 时, 类似(1)可证.

(3) 当 $\max\{|a_0| \delta b, \delta a |b_0|, \delta a \delta b\} = \delta a \delta b$, 则 $\lceil a_0, \delta a \rceil \times \lceil b_0, \delta b \rceil = [a_0 b_0 - \delta a \delta b, a_0 b_0 + \delta a \delta b]$, 从而 $a_0 b_0 \geq \delta a \delta b$, 又

$$|a_0| \delta b \leq \delta a \delta b, \delta a |b_0| \leq \delta a \delta b,$$

若 $\delta b = 0$, 则 $\delta a = 0$, 此时 $a_0 \geq 0, b_0 \geq 0$ 或 $a_0 \leq 0, b_0 \leq 0$;

若 $\delta b \neq 0$, 则 $\delta a \neq 0$, 此时 $|a_0| \leq \delta a, |b_0| \leq \delta b$,

于是 $\lceil a_0, \delta a \rceil, \lceil b_0, \delta b \rceil \in I^+$ 或 $\lceil a_0, \delta a \rceil, \lceil b_0, \delta b \rceil \in I^-$. 证毕.

性质7 设 $\lceil a_0, \delta a \rceil \in I^+, \lceil b_0, \delta b \rceil \in I^-$ 或 $\lceil a_0, \delta a \rceil \in I^-, \lceil b_0, \delta b \rceil \in I^+$, 则 $\lceil a_0, \delta a \rceil \times \lceil b_0, \delta b \rceil \in I^-$. 反之, 如果 $\lceil a_0, \delta a \rceil \times \lceil b_0, \delta b \rceil \in I^-$ 且 $\lceil a_0, \delta a \rceil \times \lceil b_0, \delta b \rceil \neq 0$, 则 $\lceil a_0, \delta a \rceil \in I^+, \lceil b_0, \delta b \rceil \in I^-$ 或 $\lceil a_0, \delta a \rceil \in I^-, \lceil b_0, \delta b \rceil \in I^+$.

证明 类似性质6的证明易证, 略.

由性质 5, 6, 7 易得:

性质 8 (1) 设 $a_0, \delta a \vdash b_0, \delta b \in I^+$ 或 $a_0, \delta a \vdash b_0, \delta b \in I^-$, 则 $a_0, \delta a \div b_0, \delta b \in I^+ (0 \nmid b_0, \delta b)$.

(2) 设 $a_0, \delta a \in I^+, \vdash b_0, \delta b \in I^-$ 或 $a_0, \delta a \in I^-, \vdash b_0, \delta b \in I^+$, 则 $a_0, \delta a \div b_0, \delta b \in I^- (0 \nmid b_0, \delta b)$.

3.2 区间距及其性质

令 $\rho_0(x, y) = |x - y|$,

$$\rho_p(x, \langle a, b \rangle) = |x - \frac{a+b}{2}| - \frac{1}{2}(b-a) = \begin{cases} a-x, x \leq \frac{a+b}{2} \\ x-b, x \geq \frac{a+b}{2} \end{cases}$$

ρ_0 为点与点的距离, ρ_p 为点与区间之距^[2], 下面引入区间与区间之距.

定义 4 设 $\langle x, y \rangle, \langle a, b \rangle \in I$, 则

$$\rho_{II}(\langle x, y \rangle, \langle a, b \rangle) = [\min\{\rho_p(x, \langle a, b \rangle), \rho_p(y, \langle a, b \rangle)\}, \max\{\rho_p(x, \langle a, b \rangle), \rho_p(y, \langle a, b \rangle)\}],$$

称为区间 $\langle x, y \rangle$ 与 $\langle a, b \rangle$ 的区间距, 简称 II 距.

下列未证明的性质是容易验证的, 证明省略.

性质 9 设 $x \in R, \langle a, b \rangle \in I$, 则 $\rho_{II}(\langle x \rangle, \langle a, b \rangle) = \rho_p(x, \langle a, b \rangle)$

该性质说明 ρ_{II} 是 ρ_p 的推广.

性质 10 $\rho_I(\langle x, y \rangle, \langle a, b \rangle)$ 为 $\rho_{II}(\langle x, y \rangle, \langle a, b \rangle)$ 的中点.

由此得到:

$$\rho_0 \xrightarrow{\text{推广}} \rho_p \xrightarrow{\text{推广}} \rho_I \xrightarrow{\text{推广}} \rho_{II}$$

性质 11 设 $\langle x, y \rangle \subset \langle a, b \rangle$, 则

(1) $\rho_{II}(\langle x, y \rangle, \langle a, b \rangle) \in I^-$;

(2) 当 $x, y \notin \{a, b\}$ 时, $0 \nmid \rho_{II}(\langle x, y \rangle, \langle a, b \rangle)$.

性质 12 设 $b-a = d-c$, 则 $\rho_{II}(\langle a, b \rangle, \langle c, d \rangle) = \rho_{II}(\langle c, d \rangle, \langle a, b \rangle)$.

性质 13 设 $\langle a, b \rangle \subset \langle c, d \rangle$ 且 $\frac{c+d}{2} \in [a, b]$, 则

$$\rho_{II}(\langle a, b \rangle, \langle c, d \rangle) = -\rho_{II}(\langle c, d \rangle, \langle a, b \rangle).$$

3.3 区间位值

定义 5 设 $X_1 = \langle a, b \rangle, X_2 = \langle c, d \rangle$ 且 $X_1 \subset X_2$, 则区间 $\langle x, y \rangle$ 关于区间套 X_1, X_2 的区间位值(简称 II 位值)为

$$D_{II}(\langle x, y \rangle, X_1, X_2) = \begin{cases} -1, & [x, y] \subset [a, b] \\ \rho_{II}(\langle x, y \rangle, X_2) - \rho_{II}(\langle x, y \rangle, X_1), & \text{其它} \end{cases}$$

性质 14 设 $X_1 = \langle a, b \rangle, X_2 = \langle c, d \rangle, X_1 \subset X_2, X = \langle x, y \rangle$, 则

(1) $D_{II}(\langle x, y \rangle, X_1, X_2) \in I^-$;

(2) 若 X_1 与 X_2 无公共端点, 则 $0 \nmid D_{II}(\langle x, y \rangle, X_1, X_2)$.

证明 当 $X \subset X_1$ 时, $D_{II} = -1$, 成立. 当 $X \not\subset X_1$ 时, 不妨设 $\frac{a+b}{2} \leq \frac{c+d}{2}$, 分下列 5 种情形

讨论. 只给出情形(III)的证明, 情形(IV)类似(III)证, 情形(I)、(II)、(V)由定义可直接得到.

$$(I) y \leq \frac{a+b}{2};$$

$$(II) x \geq \frac{c+d}{2};$$

$$(III) x \leq \frac{a+b}{2} \leq y \leq \frac{c+d}{2};$$

若 $y - b \leq a - x$, 则 $D_{II}(X, X_1, X_2) = \rho_{II}(X, X_2) - \rho_{II}(X, X_1) =$

$$[c - y, c - x] - [y - b, a - x] =$$

$$[c - \frac{x+y}{2}, \frac{y-x}{2}] - [\frac{y-x+a-b}{2}, \frac{a+b-(x+y)}{2}] =$$

$$[c - y - \frac{a-b}{2}, y - \frac{a+b}{2}] =$$

$$[c - 2y + b, c - a],$$

又 $c - a \leq 0$.

若 $a - x \leq y - b$, 则

$$D_{II}(X, X_1, X_2) = \rho_{II}(X, X_2) - \rho_{II}(X, X_1) =$$

$$[c - y, c - x] - [a - x, y - b] =$$

$$[c - \frac{x+y}{2}, \frac{y-x}{2}] - [\frac{y-x+a-b}{2}, \frac{x+y-(a+b)}{2}] =$$

$$[c - y - \frac{a-b}{2}, \frac{a+b}{2} - x] =$$

$$[c - a - y + x, c - (x+y) + b],$$

因为 $a - x \leq y - b$, 所以 $c - (x+y) + b \leq c - a \leq 0$.

$$(IV) \frac{a+b}{2} \leq x \leq \frac{c+d}{2} \leq y;$$

$$(V) \frac{a+b}{2} \leq x \leq y \leq \frac{c+d}{2}.$$

由以上五种情形知, $D_{II} \in I^-$ 且当 X_1, X_2 无公共端点时, $0 \notin D_{II}$. 证毕.

该性质说明文中对区间数的减法定义是合理的. 如果利用按经典扩张原理产生的区间数减法, 则 D_{II} 不具有这种性质, 对关联函数的引入是不利的.

4 区间关联函数

由定义4, 性质8, 11, 14 立即可得:

性质15 设 $X = \langle x, y \rangle$, $X_1 = \langle a, b \rangle$, $X_2 = \langle c, d \rangle$, $X_1 \subset X_2$, 且 X_1, X_2 无公共端点. 令

$$K_{II}(\langle x, y \rangle) = \frac{\rho_{II}(\langle x, y \rangle, X_1)}{D_{II}(\langle x, y \rangle, X_1, X_2)},$$

则(1) $[x, y] \subset (a, b) \Leftrightarrow K_{II}(X) \in I^+$, 且 $0 \notin K_{II}(X)$;

(2) $[x, y] \subset [a, b]$ 且 X 与 X_1 有公共端点 $\Leftrightarrow K_{II}(X) \in I^+$, 且 $0 \in K_{II}(X)$;

(3) $y \leq a$ 或 $x \geq b$ 或 $x \leq a \leq b \leq y \Leftrightarrow K_{II}(X) \in I^-$.

称 K_{II} 为 $\langle x, y \rangle$ 关于区间套 X_1, X_2 的区间关联函数(简称 II 关联函数).

参考文献:

- [1] 蔡文. 可拓集合和不相容问题[J] . 科学探索学报, 1983, (1): 83-97.
- [2] 蔡文. 物元模型及其应用[M] . 北京: 科学技术文献出版社, 1994. 1-63.
- [3] 蔡文主编. 从物元分析到可拓学[M] . 北京: 科学技术文献出版社, 1995. 81-165.
- [4] 蔡文, 杨春燕, 林伟初. 可拓工程方法[M] . 北京: 科学出版社, 1997. 86-106.
- [5] 胡宝清, 王孝礼, 夏军. 区域水环境质量可拓评价方法的研究[A] . 水资源可持续管理问题研究与实践[C] . 武汉: 武汉测绘科技大学出版社, 1999. 152-156.
- [6] 胡宝清. 可拓评价方法在围岩稳定性分类中的应用[J] . 水利学报, 2000, (2): 66-70.
- [7] 胡宝清, 王孝礼, 何娟娟. 区间上的可拓集及其关联函数[J] . 广东工业大学学报, 2000, 17(2): 101-104.
- [8] Hu Baoqing , Zhang Zonghang. Generalized Interval Numbers and Operations[A] . Pro. Of Int. Con. On Information & Knowledge Engineering[C] . Wuhan: Huazhong University of Science and Technology Press, 1995. 1156-1159.
- [9] Xia Jun , Hu Baoqing. The Center Operation of Interval Number and Their Applications[A] . Pro. Of Int. Con. On Information & Knowledge Engineering[C] . Wuhan: Huazhong University of Science and Technology Press, 1995. 1256-1259.
- [10] Xia Jun , Hu Baoqing. A Grey System Model for Predicting Trend Change of Urban Waste Water Load[J] . J. Of Environmental Hydrology, 1997, 5(1): 1-10.

Interval Extension Set and Correlation Function on the Interval

HU Baoqing, HE Juanjuan

(Wuhan University, Wuhan 430072, China)

Abstract: This paper introduces concepts of interval extension set and interval correlation function on the interval and discusses their properties.

Key words: extension set; interval distance; interval number; interval place value; correlation function